

# UN SISTEMA COMBINATO ARCO SOTTILE-TRAVE AD ARCUATURA SPECULARE ISOSOLLECITATA: LA TRAVATURA FOGLIFORME

## 1 – Introduzione

Nella immagine collettiva che si ha della Scienza la Meccanica delle Strutture non appartiene certo ormai più a quel gruppo di discipline dalle quali il grande pubblico si attende ancora annunci di nuove, clamorose scoperte.

Forse perché ognuno di noi, sia pur digiuno di Scienza delle Costruzioni, è in cuor suo convinto di poter stabilire, con il semplice ricorso all'istinto e al buon senso, se una certa costruzione sia in grado oppure no di “stare in piedi” come dimostrato dalle decine di proposte fantasiose formulate per risolvere il delicatissimo problema della stabilizzazione della Torre di Pisa.

Eppure, di fronte a organismi strutturali non usuali, capita spesso che il nostro intuito statico ci inganni spingendoci a trarre conclusioni che l'analisi rigorosa dimostra poi essere clamorosamente errate fornendocene altre inaspettate.

Tra questi casi credo possa essere inserito anche quello delle strutture realizzate accoppiando opportunamente in parallelo una trave ed un arco per formare quelli che, nel senso degli ingegneri, vengono chiamati sistemi combinati arco-trave.

La statica di questi sistemi non presenta certo lati oscuri ma in presenza di geometrie particolari le soluzioni che si ottengono con i semplici e ben noti metodi di risoluzione delle strutture iperstatiche possono essere sorprendenti e inattese.

## 2 – Le proprietà statiche dei sistemi arco-trave

Consideriamo lo schema statico in Figura 1 dove una trave flessibile, appoggiata in A e in B, è sostenuta anche in un certo numero di punti intermedi da aste a biella collegate nei nodi cerniera di un arco poligonale pure realizzato da aste-biella disposte in serie.

Si riconosce subito che la struttura è una volta iperstatica. Scegliamo come incognita iperstatica lo sforzo  $R_0$  nell'asta di collegamento in chiave applicando dunque l'incognita  $X_1 = 1$  agli estremi della asta pensata sconnessa dal resto della struttura.

Il calcolo di  $X_1$  discende immediatamente dalla unica equazione di Muller-Breslau

$$X_1 = - \eta_{10} / \eta_{11}$$

dove  $\eta_{10}$  ed  $\eta_{11}$  rappresentano come noto lo spostamento relativo tra le facce della sconnessione rispettivamente sotto l'azione delle forze esterne e dell'incognita iperstatica  $X_1$ .

Utilizzando il Teorema di Mohr, detti rispettivamente  $M'_{10}$  e  $M'_{11}$  il momento fittizio generato nella sezione di mezzeria della trave dal carico esterno  $q(z)$  e quello generato dalla  $X_1 = 1$  questo si calcola come

$$X_1 = -M'_{10} / M'_{11}$$

Siano  $S_1, S_2, \dots, S_i$  gli sforzi assiali nelle aste dell'arco e  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_i$  quelli nelle aste di collegamento.

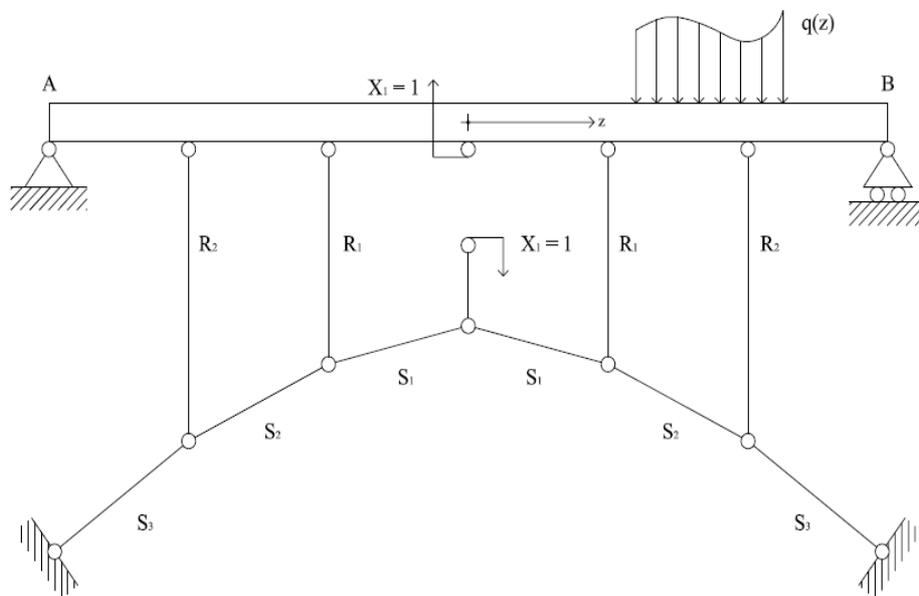


Figura 1 – Sistema combinato aperto arco sottile-trave

Osserviamo preliminarmente che nel sistema principale caricato con  $q(z)$ , l'equilibrio del nodo di chiave dell'arco implica che  $S_{10} = 0$  e di conseguenza, affinché anche gli altri nodi siano in equilibrio:

$$S_{20} = S_{30} = \dots = S_{n0} = 0$$

$$R_{10} = R_{20} = R_{30} = \dots = R_{n0} = 0$$

Sotto l'azione della  $X_1 = 1$ , in virtù della assialsimmetria di questa condizione, gli sforzi  $S_{1i}$  e  $R_{1i}$  risultano pure simmetrici.

Pertanto, poiché gli sforzi finali sono dati dalle

$$R_i = R_{i0} + X_1 R_{i1} = X_1 R_{i1}$$

$$S_i = S_{i0} + X_1 S_{i1} = X_1 S_{i1}$$

si può dedurre la prima proprietà dei sistemi combinati arco-trave ossia che gli sforzi nelle aste di collegamento e in quelle dell'arco sono sempre simmetrici qualunque sia il carico  $q(z)$ .

Questa proprietà può essere compresa meglio se si scompone la  $q(z)$  in una condizione emisimmetrica (a) ed in una condizione simmetrica (b).

E' evidente che la condizione (a) non produce spostamenti verticali dei punti della struttura appartenenti all'asse di simmetria, dunque

$$\eta_{10} = 0 \text{ ma } \eta_{11} \neq 0$$

quindi

$$X_1 = 0$$

Poiché gli  $S_i$  ed  $R_i$  dipendono solo da  $X_1$ , essi sono pure nulli e quindi si deduce che la quota di carico asimmetrico viene assorbita solo dalla trave.

Sotto la azione della quota simmetrica (b) del carico esterno  $q(z)$  restano non nulli sia  $\eta_{10}$  che  $\eta_{11}$ , dunque anche  $X_1$  è diversa da zero e con essa gli  $S_i$  e  $R_i$  simmetrici rispetto all'asse.

Sia l'arco che la trave risultano sollecitati ma l'arco e le aste di collegamento reagiscono, in simmetria, solo alla quota simmetrica del carico  $q(z)$ .

### 3 – Sistemi combinati ad arco isosollecitato

E' noto che la scelta del sistema principale non influenza la determinazione delle sollecitazioni ma può favorire o meno il calcolo. Dunque i risultati ottenuti in precedenza hanno validità generale.

Abbiamo trovato che gli  $R_i$ ,  $S_i$  sono sempre assialsimmetrici.

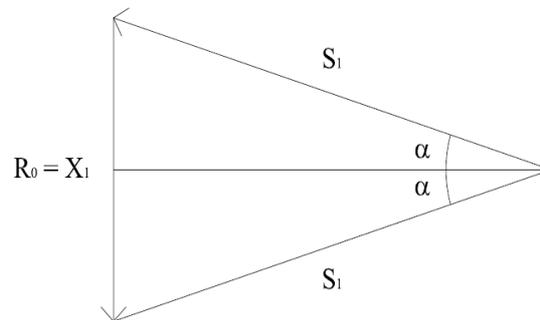
Nel caso in cui l'arco sia inscritto in un arco di cerchio e le aste di collegamento siano disposte lungo le sue direzioni radiali, si deduce facilmente che gli sforzi  $R_i$  sono eguali tra loro e pari proprio alla incognita iperstatica:

$$R_0 = R_1 = R_2 = \dots = R_i = R$$

Parimenti gli sforzi  $S_i$  nelle aste dell'arco sono tutti eguali tra loro:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_i = S$$

Infatti, esaminando l'equilibrio del nodo di chiave  $C_0$ , se  $\alpha$  è l'angolo compreso tra una delle aste che vi convergono e la normale all'asta di collegamento sconnessa (v. figura), si ottiene:



$$R_0 = 2S_1 \sin \alpha = X_1$$

Il poligono di equilibrio del nodo  $C_1$  è identico al precedente, per cui

$$R_0 = R_1 = X_1$$

Procedendo nello stesso modo per gli altri nodi  $C_2, C_3, \dots, C_i$  si conclude che

$$R_0 = R_1 = R_2 = \dots = R_i = X_1$$

Allo stesso modo otteniamo che

$$S_1 = S_2 = \dots = S_i = X_1 / 2 \sin \alpha$$

Si può quindi concludere che nei sistemi combinati arco sottile-trave nei quali l'arco è inserito in un arco di cerchio e le aste di collegamento sono rispetto ad esso radiali, qualunque sia il carico  $q(z)$  agente sulla trave, le aste di collegamento sono uniformemente sollecitate dal medesimo sforzo  $X_1$ .

Anche le aste dell'arco sono uniformemente sollecitate con  $S = X_1 / 2 \sin \alpha$ , proprietà questa che consegue anche dalla disposizione delle aste dell'arco secondo il poligono funicolare delle forze trasmesse dalle aste di collegamento.

In altre parole si potrebbe anche argomentare come segue: la trave da sola è isostatica e dunque capace di equilibrare qualsivoglia disposizione di carico  $q(z)$ .

Viceversa l'arco è labile, dunque capace di sviluppare equilibrio soltanto in presenza di particolari distribuzioni di forze applicate. Nel caso in esame solo se tutte le forze  $R$  sono eguali tra loro.

D'altra parte la struttura intera è iperstatica, quindi certamente in equilibrio e con essa anche sue porzioni, tra le quali l'arco. Quindi necessariamente le  $R_i$  sono uguali ma ciò può accadere solo se le  $q(z)$  sono simmetriche.

Se non lo sono la quota emisimmetrica viene intercettata soltanto dalla trave lasciando l'arco

scarico. La quota simmetrica verrà assorbita dal sistema arco-trave in funzione delle rispettive rigidzze. E' come se si instaurasse una simbiosi tra l'arco e la trave grazie alla quale quest'ultima sopporta, da sola, proprio quella quota di carico che l'arco non potrebbe sostenere mentre si lascia affiancare dall'arco nel sostentamento di quella quota che l'arco è capace di equilibrare pur essendo labile.

#### 4 – Sistemi combinati chiusi arco sottile isosollecitato-trave. Le travi fogliiformi

Sistemi combinati del tipo di Figura 1 sono aperti, vale a dire che l'arco non si richiude sulla trave e la sua spinta viene trasferita all'esterno e assorbita dalle strutture di fondazione.

Quando le cerniere di imposta dell'arco sono solidali con le estremità della trave la spinta viene assorbita da questa e il sistema combinato si dice chiuso (v. Figura 2).

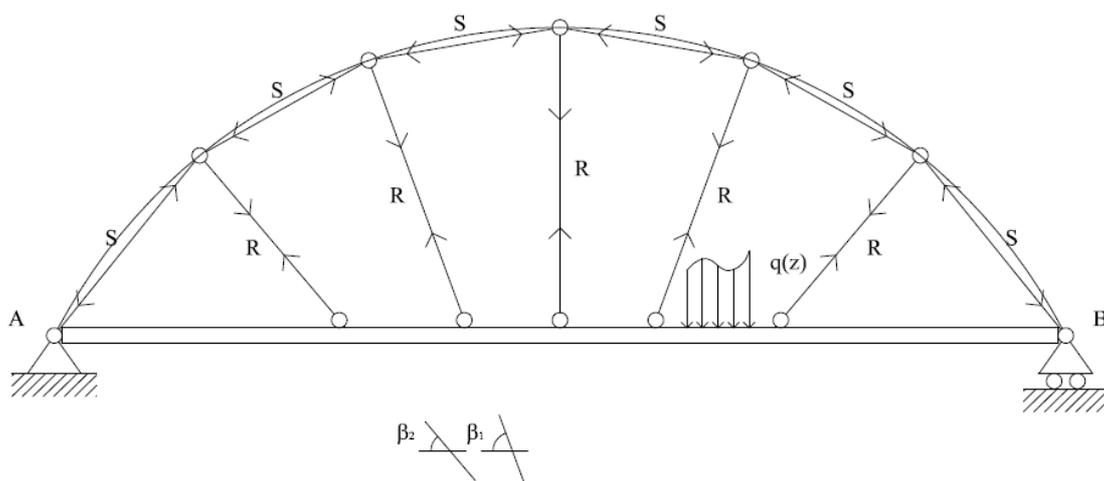


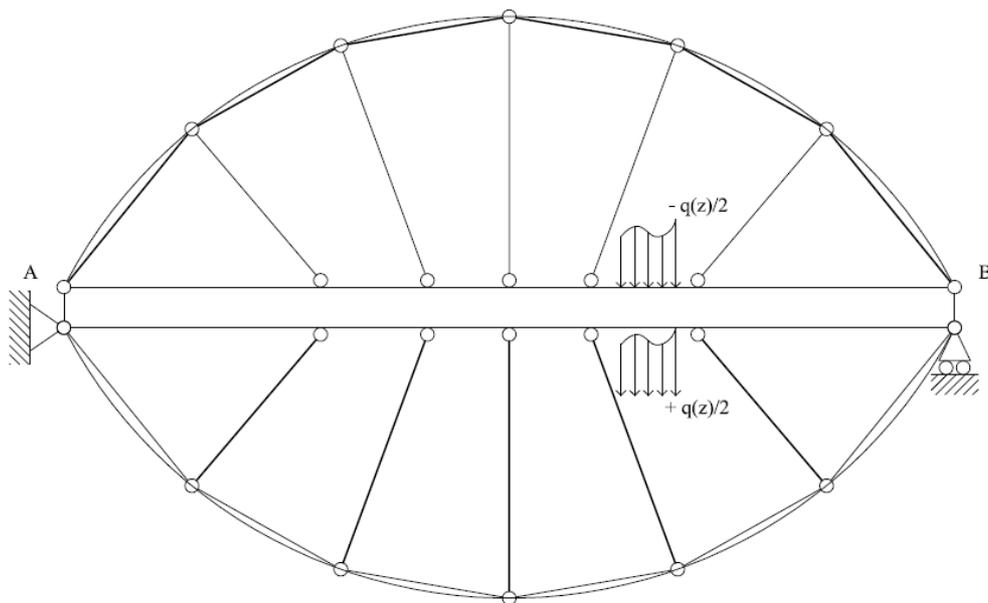
Figura 2 – Sistema combinato arco sottile-trave chiuso con arco uniformemente sollecitato

Se l'arco è inscritto in un arco di cerchio e le aste di collegamento sono disposte radialmente, anche in questo caso le aste dell'arco sono uniformemente sollecitate con uno sforzo S e le aste di collegamento sono uniformemente sollecitate con uno sforzo R qualunque sia  $q(z)$ .

La trave risulta tesa con  $N(z)$  variabile per effetto della spinta e delle componenti orizzontali delle R.

La disposizione di Figura 2 può essere replicata al lembo inferiore della trave.

La struttura acquista una ulteriore simmetria rispetto all'asse della trave ed il carico può essere scomposto nelle quote simmetrica ed emisimmetrica anche rispetto a questo asse.



**Figura 3** – La Trave Fogliforme: un sistema combinato chiuso arco sottile-trave a doppia arcuatura isosollecitata

La quota simmetrica di  $q(z)$  non produce alcuna sollecitazione nella trave se si eccettua l'effetto di compressione locale lungo l'altezza di questa.

La quota emisimmetrica induce evidentemente sollecitazioni emisimmetriche rispetto all'asse di simmetria orizzontale.

Dunque nell'arco superiore lo sforzo  $S$  è di compressione, nell'arco inverso inferiore lo sforzo è ugualmente intenso ma di trazione.

Analogamente lo sforzo  $R$  nelle aste di collegamento superiori è di trazione ed in quelle inferiori di compressione.

Lo sforzo normale nella trave risulta ovunque nullo di conseguenza, in quanto tutte le componenti orizzontali di  $R$  e di  $S$  sviluppate dall'arco superiore sono compensate dalle omonime corrispondenti dell'arco traverso inferiore.

Dal punto di vista costruttivo, la simmetria rispetto all'asse della trave impone che l'area delle sezioni trasversali di elementi corrispondenti sia la stessa ma poiché i segni degli sforzi sono, come visto, opposti, allora le aste compresse dovranno, a parità di area, essere dotate di momento di inerzia adeguatamente maggiore ottenibile ad esempio mediante profili tubolari a raggio variabile e spessore costante.

Di conseguenza le aste dell'arco superiore e quelle di collegamento dell'arco inverso avranno una apparenza voluminosa mentre quelle dell'arco inverso e le aste di collegamento dell'arco superiore appariranno relativamente sottili.

## 5 – Travi fogliiformi asimmetriche

L'arco inverso può non avere la stessa geometria di quello superiore. In tali casi la struttura è due volte iperstatica.

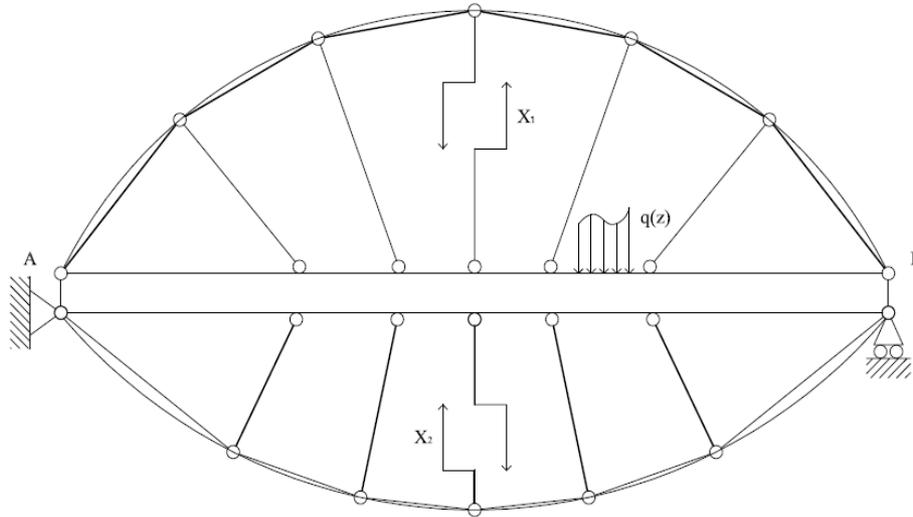


Figura 4 – Trave fogliiforme asimmetrica

L'incognita  $X_1$ , pari allo sforzo normale nelle aste di collegamento superiori, e l'incognita  $X_2$ , pari allo sforzo di trazione nelle aste di collegamento inferiori saranno in generale diversi tra loro pur mantenendo, ciascuno per proprio conto, le proprietà evidenziate in precedenza.

Si può ottenere tuttavia anche in questo caso la condizione  $|X_1| = |X_2|$ , ove ritenuto necessario, calibrando adeguatamente le rigidzze assiali delle aste degli archi e delle aste di collegamento.

Il Momento Flettente causato dalla quota simmetrica di  $q(z)$  è contrastato, nelle travi fogliiformi, non solo dalle componenti verticali delle  $R$  e delle  $S$  ma anche dalle loro componenti orizzontali grazie alla eccentricità che queste hanno rispetto all'asse della trave irrigidente.

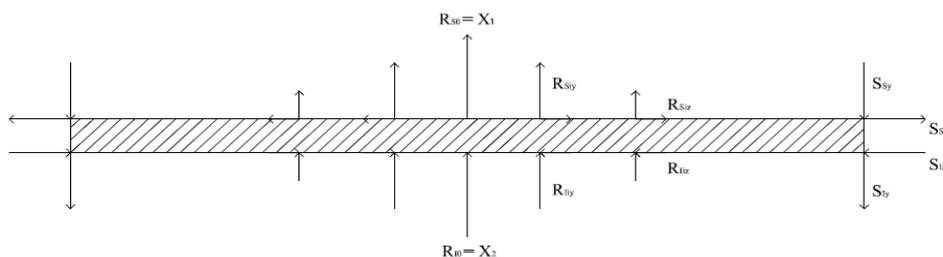


Figura 5 – Schema delle azioni che agiscono sulla trave irrigidente

## 6 – La sezione trasversale

La sezione trasversale può essere organizzata combinando le possibilità di sdoppiare oppure no l'arco superiore e quello inverso inferiore.

Lo sdoppiamento dell'arco superiore consentirà di inserire un controvento tra i due archi ai fini della loro stabilizzazione reciproca mentre l'arco inferiore, essendo teso, potrà essere realizzato senza sdoppiamento.

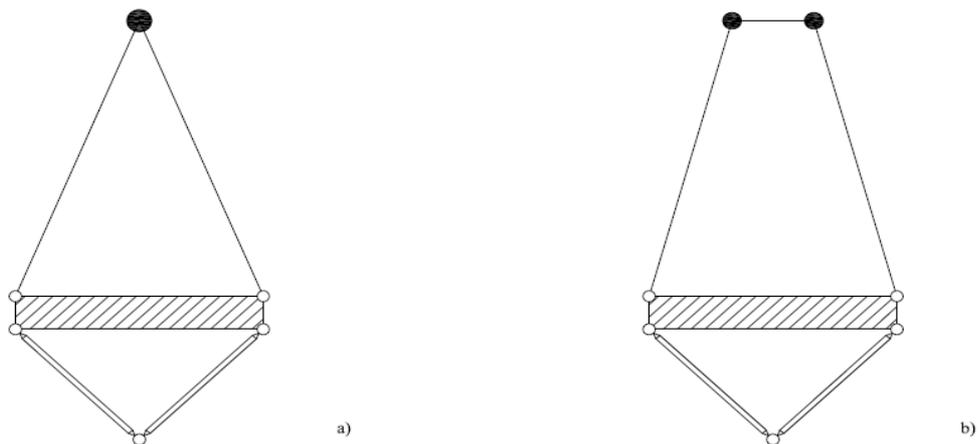


Figura 6 – Esempi di sezione trasversale

## 7 – Rapporti di ribassamento

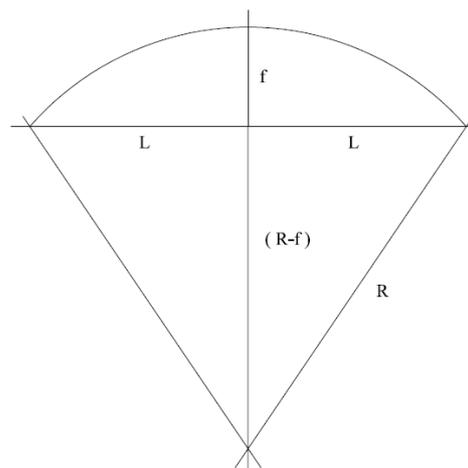


Figura 7

Si trova facilmente che:

$$f = R[1 - \sqrt{1 - (L/R)^2}]$$

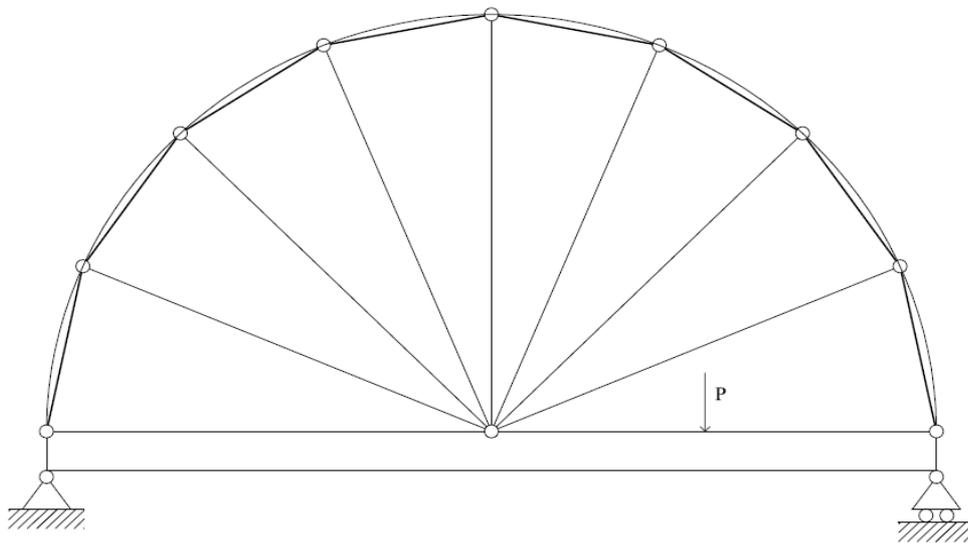
Detti  $\beta = R / L$  e  $\alpha = f / L$  segue che

$$\alpha = \beta \left[ 1 - \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}} \right] = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$$

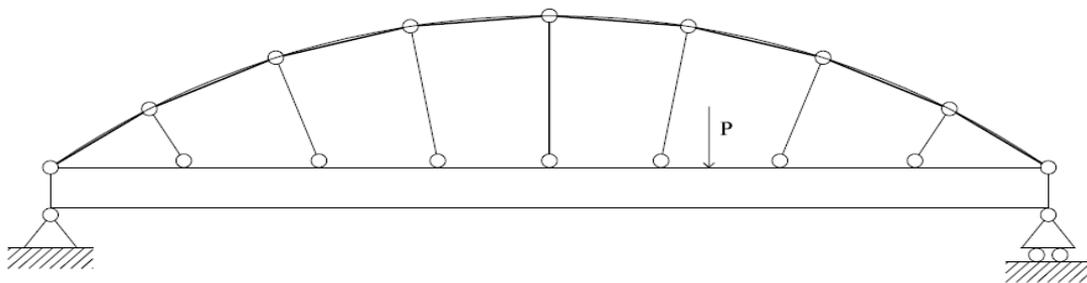
Ad esempio:  $R = L \quad \rightarrow \quad \beta = 1, \quad \alpha = 1$   
 $R = 2L \quad \rightarrow \quad \beta = 2, \quad \alpha = 0.27$

Sia  $\beta$  che  $\alpha$  danno una misura del grado di ribassamento dell'arco, ma tra i due  $\alpha$  è più immediato rappresentando il rapporto tra la freccia  $f$  e la semicorda dell'arco  $L$

$\alpha = 1$             assenza di ribassamento  
 $\alpha \rightarrow 0$         aumento di ribassamento



**Figura 8** –  $\alpha = 1$ , 7 aste di collegamento

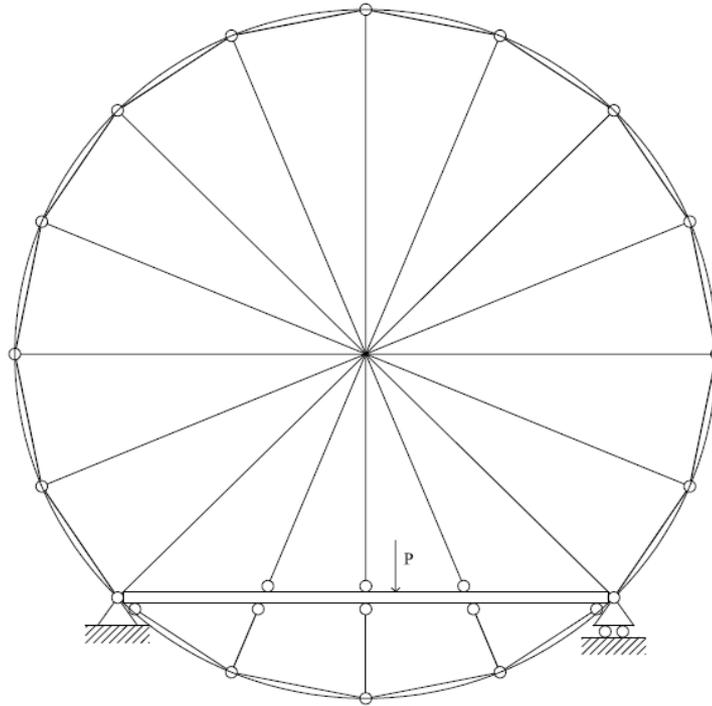


**Figura 9** –  $\alpha = 0.35$ , 7 aste di collegamento

A questo punto è interessante capire come vari la risposta statica al variare del solo parametro  $\alpha$ , quali siano i vantaggi ottenibili con una soluzione fogliiforme e come sia ottimizzabile questo tipo di

struttura. Infatti, a parità di carichi applicati, possiamo studiare quanto si possono ribassare gli archi variando le rigidità delle aste che compongono gli stessi e le aste di collegamento e cercare quale valore di  $\alpha$  renda minimo, ad esempio, il peso totale della struttura.

Potremmo anche immaginare degenerazioni paradossali, come quella in Figura 10, in cui le aste si sovrappongono nel centro dell'arco superiore senza mutuo legame.



**Figura 10**– Esempio di degenerazione paradossale di una trave fogliiforme